



CONCOURS

Magistère de Développement Économique

1ère année

Vendredi 5 avril 2024

Durée : 2 heures

Documents et calculatrices non autorisés

Épreuve de Mathématiques-Statistiques

Le sujet comporte **3 exercices - 4 pages** incluant la page d'identification + **2 tables statistiques**.
Vous devez vérifier en début d'épreuve le nombre de pages de ce fascicule. S'il est incomplet,
demandez un autre exemplaire au surveillant.

Ce sujet complet doit être obligatoirement remis dans votre copie à la fin de l'épreuve

Exercice 1 - Répondre directement sur cette feuille et mettre la feuille dans la copie

Numéro de
candidat :

Dans cet exercice, veuillez cocher une seule case pour répondre à chaque question

Question 1/ La dérivée première de la fonction exponentielle : $h(x) = \exp(3x^4 + 5)$ est donnée par (cocher une seule case) :

- ☐ $h'(x) = \exp(3x^4 + 5)$
- ☐ $h'(x) = (12x^3 + 5) \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐ $h'(x) = 12x^3 \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐ $h'(x) = (3x^4 + 5) \cdot \exp(12x^3)$
- ☐ $h'(x) = 12x \cdot \exp(3x^4 + 5)$
- ☐ $h'(x) = 12x^3 \cdot \exp(12x^3)$
- ☐ $h'(x) = 12x^2 \cdot \exp(3x^4)$
- ☐ Je ne sais pas

Question 2/ Le discriminant de $3x^2 + 2x - 1$ vaut (cocher une seule case) :

- ☐ $\Delta = b^2 + 4ac = 16$
- ☐ $\Delta = b^2 - 4ac = -8$
- ☐ $\Delta = -b + 4ac = -14$
- ☐ $\Delta = b^2 - 4ac = 16$
- ☐ $\Delta = b^2 + 4ac = -8$
- ☐ Je ne sais pas

Question 3/ En logique mathématique, pour deux événements A et B non vides, le connecteur « ET » se traduit par (cocher une seule case) :

- ☐ une réunion d'événements disjoints
- ☐ une réunion d'événements non nécessairement disjoints
- ☐ une intersection d'événements
- ☐ Je ne sais pas

Question 4/ On veut déterminer les racines de $f(x) = -x^2 + 4x - 4$. Que peut-on dire des racines éventuelles de f (cocher une seule case) :

- ☐ il y a deux racines simples qui sont $x = 2$ et $x = -2$
- ☐ il y a deux racines simples qui sont $x = 1$ et $x = -4$
- ☐ il y a une racine double qui est $x = -2$
- ☐ il y a une racine double qui est $x = 2$
- ☐ il y a deux racines simples qui sont $x = -1$ et $x = 4$
- ☐ il n'y a pas de racines réelles car le discriminant est négatif
- ☐ Je ne sais pas

Numéro de
candidat :

Question 5/ Si deux événements A et B, non vides, sont **incompatibles**, alors (cocher une seule case) :

- ☐ A et B sont toujours indépendants
- ☐ A et B peuvent être indépendants
- ☐ A et B ne sont jamais indépendants
- ☐ Je ne sais pas

Question 6/ Soit X et Y deux variables aléatoires dont la covariance est non nulle : $\text{cov}(X; Y) \neq 0$, alors (cocher une seule case) :

- ☐ ces deux variables aléatoires X et Y sont toujours indépendantes
- ☐ ces deux variables aléatoires X et Y peuvent être indépendantes
- ☐ ces deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes
- ☐ on ne peut pas conclure sur l'indépendance ou la non-indépendance de ses variables aléatoires
- ☐ Je ne sais pas

Question 7/ Soit $(X; Y)$ un vecteur aléatoire discret pour lequel X prend les valeurs a_i où $(1 \leq i \leq n_X)$ et Y prend les valeurs b_j avec $(1 \leq j \leq n_Y)$. Parmi les définitions suivantes, laquelle est vraie pour la **loi jointe du vecteur aléatoire** $(X; Y)$? (cocher une seule case) :

- ☐ la loi jointe est donnée par les intersections provenant de X et de Y : $P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\})$
- ☐ la loi jointe est donnée par la 1^{ère} et la 2^{ème} composante séparément : $P(\{X = a_i\})$ et $P(\{Y = b_j\})$
- ☐ la loi jointe est donnée par les observations successives de X et de Y : $P(\{X = a_i\})$ sachant $\{Y = b_j\}$
- ☐ Je ne sais pas

Question 8/ Une boîte contient 6 jetons, numérotés de 4 à 9. On pioche au hasard 3 jetons. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **entièrement** correcte ? (cocher une seule case) :

- ☐ Si on pioche chaque jeton puis on le replace dans la boîte et on mélange avant de piocher le suivant, on ne note pas l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est un arrangement
- ☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le suivant, et on note l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une combinaison
- ☐ Si on pioche chaque jeton et on ne le replace pas dans la boîte avant de piocher le suivant, et on ne note pas l'ordre dans lequel on a obtenu les numéros, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est un arrangement
- ☐ Si on pioche simultanément les jetons, c'est "non ordonné" et "sans répétition possible" donc c'est une combinaison
- ☐ Si on pioche simultanément les jetons, c'est "non ordonné" et "avec répétition possible" donc c'est une liste
- ☐ Je ne sais pas

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier clairement les valeurs utilisées (on ne demande pas le résultat final)

Afin d'optimiser le packaging de nouveaux brownies chocolat-noix de pécan, la marque qui les produit réalise une enquête de satisfaction auprès de sa clientèle. On interroge, indépendamment les uns des autres, les personnes qui ont acheté ce produit (le nouveau brownie).

Parmi ces n personnes interrogées, **5% seulement déclarent avoir été déçues par le produit**. Soit X le nombre de personnes **qui ont apprécié** le produit, parmi n personnes interrogées au hasard et indépendamment les uns des autres.

Question 1/ Dans cette question, on interroge **$n = 10$ personnes**

- 1.a/ Justifier la construction de la loi binomiale de la variable aléatoire X
- 1.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la valeur numérique de la probabilité pour **que toutes les personnes parmi les 10 interrogées aient apprécié** le produit
- 1.c/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la/les valeurs numériques de la probabilité de l'événement « **au plus 3 d'entre elles ont été déçues** par le produit ».

Question 2/ Dans cette question, on interroge **60 personnes, on rappelle que $E(Y) = 60 \times 0.05 = 3$**

- 2.a/ Justifier l'approximation de la loi binomiale de $Y = (n - X)$ par une loi de Poisson de paramètre 3
- 2.b/ Exprimer l'événement puis lire dans une table à préciser (en justifiant) et écrire la valeur numérique de la probabilité qu'**exactement 5 personnes parmi 60** soient déçues par le produit

Question 3/ D'autre part, lors de l'achat du produit, les personnes concernées ont d'abord attendu à la caisse de leur magasin avant de repartir avec le produit. Le temps d'attente (exprimé en minutes) à cette caisse, avant l'achat du produit, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0$$

$$f(t) = 2k \exp(-t) \quad \text{si } t > 0$$

- 3.a/ Prouver que le coefficient multiplicatif est $k = \frac{1}{2}$ en détaillant votre raisonnement. En déduire la fonction de répartition de T .
- 3.b/ Exprimer la probabilité que le temps d'attente à la caisse soit de moins de 5 minutes ? (on ne demande pas le résultat numérique)

Exercice 3 – Dans tout l'exercice, poser le détail des calculs et justifier votre raisonnement

Dans les questions 1 et 2, **Donner l'espace d'appartenance de chaque matrice et du résultat (si il existe)**, puis :

Question 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exprimer si c'est possible **$A \times B$** en posant le détail des calculs

Question 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exprimer si c'est possible **$B \times A$** en posant le détail des calculs

Question 3 : Exprimer la méthode puis le résultat pour le calcul du déterminant $\begin{vmatrix} 7 & -1 & -10 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

Calculer le déterminant **en justifiant chaque étape**

TABLES DE DISTRIBUTIONS DISCRETES

1/ Table de distribution binomiale de paramètres n et p : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

n	k	P									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	0,0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	0,0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	0,8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	0,1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	0,0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	0,0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	0,8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	0,1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	0,0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	0,0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0750	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	0,0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	0,7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	0,2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	0,0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	0,0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	0,0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	0,0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	0,7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	0,2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	0,0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	0,0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	0,0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	0,0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	0,6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	0,2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	0,0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	0,0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	0,0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	0,0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	0,0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	0,6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	0,2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	0,0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	0,0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	0,0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	0,0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	0,0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	0,6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	0,2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	0,0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	0,0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	0,0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	0,0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	0,0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	0,0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	0,5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	0,3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	0,0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	0,0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	0,0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	0,0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	0,0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	0,0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	0,0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	0,0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010

NOTE. — Les points placés au début des probabilités sont à remplacer par 0, Exemple : .9025 signifie 0,9025.

1/ Tables de loi de Poisson de paramètre λ :

$$p(k, \lambda) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

λ k	1		2		3		4		5		6		7	
	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$
0	0,3679	0,3679	0,1353	0,1353	0,0498	0,0498	0,0183	0,0183	0,0067	0,0067	0,0025	0,0025	0,0009	0,0009
1	0,3679	0,7358	0,2707	0,4060	0,1494	0,1991	0,0733	0,0916	0,0337	0,0404	0,0149	0,0174	0,0064	0,0073
2	0,1839	0,9197	0,2707	0,6767	0,2240	0,4232	0,1465	0,2381	0,0842	0,1247	0,0446	0,0620	0,0223	0,0296
3	0,0163	0,9810	0,1804	0,8571	0,2240	0,6472	0,1954	0,4335	0,1404	0,2650	0,0892	0,1512	0,0521	0,0818
4	0,0153	0,9963	0,0902	0,9473	0,1680	0,8152	0,1954	0,6288	0,1755	0,4405	0,1339	0,2851	0,0912	0,1730
5	0,0031	0,9994	0,0361	0,9834	0,1008	0,9161	0,1563	0,7851	0,1755	0,6160	0,1606	0,4457	0,1277	0,3007
6	0,0005	0,9999	0,0120	0,9955	0,0504	0,9665	0,1042	0,8893	0,1462	0,7622	0,1606	0,6063	0,1490	0,4497
7	0,0001	1,0000	0,0034	0,9989	0,0216	0,9881	0,0595	0,9489	0,1044	0,8666	0,1377	0,7440	0,1490	0,5987
8			0,0009	0,9998	0,0081	0,9962	0,0298	0,9786	0,0653	0,9319	0,1033	0,8472	0,1304	0,7291
9			0,0002	1,0000	0,0027	0,9989	0,0132	0,9919	0,0363	0,9682	0,0688	0,9161	0,1014	0,8305
10					0,0008	0,9997	0,0053	0,9972	0,0181	0,9863	0,0413	0,9574	0,7010	0,9015
11					0,0002	0,9999	0,0019	0,9991	0,0082	0,9945	0,0225	0,9799	0,0452	0,9466
12					0,0001	1,0000	0,0006	0,9997	0,0034	0,9980	0,0113	0,9912	0,0264	0,9730
13							0,0002	0,9999	0,0013	0,9993	0,0052	0,9964	0,0142	0,9872
14							0,0001	1,0000	0,0005	0,9998	0,0022	0,9986	0,0071	0,9943
15									0,0002	0,9999	0,0009	0,9995	0,0033	0,9976
16									0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0014	0,9990
17											0,0001	1,0000	0,0006	0,9996
18													0,0002	0,9999
19													0,0001	1,0000

λ k	8		9		10		11		12		13		14	
	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$	$p(k, \lambda)$	$F(k)$
0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001	0,0005	0,0005	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001				
1	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0023	0,0028	0,0010	0,0012	0,0004	0,0005	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
2	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0076	0,0104	0,0037	0,0049	0,0018	0,0023	0,0008	0,0010	0,0004	0,0005
3	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0293	0,0402	0,0151	0,0203	0,0053	0,0076	0,0027	0,0037	0,0013	0,0018
4	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0631	0,1029	0,0375	0,0512	0,0203	0,0375	0,0127	0,0203	0,0037	0,0055
5	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0901	0,2203	0,0646	0,1432	0,0437	0,0895	0,0281	0,0540	0,0174	0,0316
6	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,1126	0,3329	0,0888	0,2320	0,0655	0,1550	0,0457	0,0997	0,0304	0,0620
7	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,1251	0,4580	0,1085	0,3405	0,0874	0,2424	0,0661	0,1658	0,0473	0,1093
8	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1251	0,5831	0,1194	0,4599	0,1048	0,3472	0,0859	0,2517	0,0663	0,1756
9	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1137	0,6968	0,1194	0,5793	0,1144	0,4616	0,1015	0,3532	0,0844	0,2600
10	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,0948	0,7916	0,1094	0,6887	0,1144	0,5760	0,1099	0,4631	0,0984	0,3584
11	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,0729	0,8645	0,0926	0,7813	0,1056	0,6816	0,1099	0,5730	0,1060	0,4644
12	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0521	0,9166	0,0728	0,8541	0,0905	0,7721	0,1021	0,6751	0,1060	0,5704
13	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0347	0,9513	0,0534	0,9075	0,0724	0,8445	0,0885	0,7636	0,0989	0,6693
14	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0217	0,9730	0,0367	0,9442	0,0543	0,8988	0,0719	0,8355	0,0866	0,7559
15	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0128	0,9857	0,0237	0,9679	0,0383	0,9371	0,0550	0,8905	0,0713	0,8272
16	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0071	0,9928	0,0145	0,9824	0,0255	0,9626	0,0397	0,9302	0,0554	0,8826
17	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0037	0,9965	0,0084	0,9908	0,0161	0,9787	0,0272	0,9574	0,0409	0,9235
18	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0019	0,9984	0,0046	0,9954	0,0097	0,9884	0,0177	0,9751	0,0286	0,9521
19	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0009	0,9993	0,0024	0,9978	0,0055	0,9939	0,0109	0,9660	0,0191	0,9712
20	0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0004	0,9997	0,0012	0,9990	0,0030	0,9969	0,0065	0,9925	0,0121	0,9833
21	0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0016	0,9985	0,0037	0,9962	0,0074	0,9907
22			0,0001		0,0001	1,0000	0,0003	0,9999	0,0008	0,9993	0,0020	0,9982	0,0043	0,9950
23							0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0010	0,9992	0,0024	0,9974
24									0,0002	0,9999	0,0005	0,9997	0,0013	0,9987
25									0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0007	0,9994
26											0,0001	1,0000	0,0003	0,9997
27													0,0002	0,9999
28													0,0001	1,0000
29														
30														
31														
32														